به نام خدا

مکانیک سیالات

طاهره کاظمی

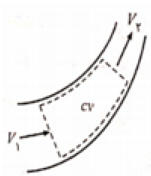
دینامیک سیالات-تئوری اندازه حرکت

تئوری اندازه حرکت:

ساده ترین تعریف اندازه حرکت، حاصل ضرب جرم در سرعت.

یعنی اگر جسمی به جرم M با سرعت ثابت V در حال حرکت باشد، در آن صورت دارای اندازه حرکت MV خواهد شد. قانون دوم نیوتن را بر اساس اندازه حرکت داریم:

$$\vec{F} = M\vec{a} = M\left(\frac{\Delta\vec{V}}{t}\right) = \frac{M(\vec{V_2} - \vec{V_1})}{t}$$



عبارت بالا یعنی: برآیند نیروهای خارجی وارد بر جسمی به جرم M، برابر است با تغییرات اندازه حرکت آن در واحد زمان.

برای به کار بردن اندازه حرکت دردینامیک سیالات، یک حجم کنترل را مانند شکل در قسمتی از لوله جریان در نظر میگیریم:

سپس فرض می کنیم در یک لحظه مشخص، جرم M داخل حجم کنترل باشد و پس از طی زمان t از حجم کنترل خارج شود.

برآیند نیروهای وارد بر این جرم (یا همان جرم کنترل) که باعث خرج کامل جرم از حجم کنترل شده برابر است با:

$$\vec{F} = \frac{M(\vec{V_2} - \vec{V_1})}{t} = \frac{M}{t}(\vec{V_2} - \vec{V_1})$$

که در رابطه بالا $\frac{M}{t}$ دبی جرمی ($\dot{m}$) می باشد.

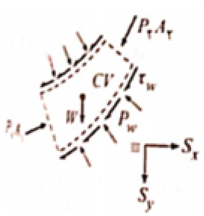
$$\vec{F} = \dot{m}\,(\vec{V_2} - \vec{V_1})$$

حال اگر $\rho = const$ باشد و دبی حجمی (Q) نیز ثابت باشد داریم:

$$\vec{F} = \rho Q(\vec{V_2} - \vec{V_1})$$

این رابطه، معادله اندازه حرکت (مومنتوم) خطی سیال نامیده می شود که مفهوم آن بیانگر تئوری اندازه حرکت (مومنتوم) است.

در این معادله F (یا همان $\sum F$)، برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیال در حجم کنترل است که مثل V_1و V_2 کمیتی برداری بوده و ترکیبی از نیروهای زیر است:



۱- نیروی وزن (W) که یک نیروی حجمی است و بر حجم کنترل وارد می شود.

۲- نیروی فشار هیدرواستاتیک (F_p) که یک نیروی سطحی بوده و شامل اثرات فشارهای P_1و P_2 در ورودی و خروجی حجم کنترل است، به عبارت دیگر این نیرو بر قسمتی از سطح کنترل وارد می شود که محل عبور و مرور جریان است. اگر مقاطع ورودی و خروجی حجم کنترل را عمود بر جریان در نظر گرفته و مساحت آنها را با A_1و A_2 نشان دهیم، در آن صورت اندازه نیروی فشاری در ورودی و خروجی حجم کنترل به ترتیب برابر P_1A_1و P_2A_2 خواهد بود که در راستای عمود بر سطح و به طرف داخل آن، وارد می شوند.

۳- نیروی اندرکنش سیال و جداره (S) که یک نیروی سطحی بوده و بر قسمتی از سطح کنترل که در مجاورت جسم جامد است، وارد می شود. این نیرو ناشی از اثرات توزیع تنش های قائم P_Wو تنش های برشی τ_W می باشد و برآیند نیروهایی که این تنش ها ایجاد می کنند (S)، از جداره به سیال موجود در حجم کنترل وارد می شود.

نکته: فرم کلی معادله مومنتوم خطی را می توان با استفاده از قانون دوم نیوتن و بکارگیری معادله انتقال رنولدز به صورت زیر به دست آورد:

الف: قانون دوم نیوتن

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$$

ب: معادله انتقال رینولدز

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \eta\rho d\forall + \int_{CS} \eta\rho V.\,dA$$

در نهایت معادله انتقال رینولدز به صورت زیر می شود:

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}\rho d\forall + \int_{CS} \vec{V}\rho V.\,dA$$

رابطه بالا فرم کلی معادله مومنتوم خطی است. و بیان می کند که برآیند نیروهای خارجی وارد بر حجم کنترل برابر با نرخ افزایش مومنتم در داخل حجم کنترل، به علاوه نرخ خالص خروج مومنتوم از حجم کنترل است. در این حالت $\sum \boldsymbol{F_{SYS}} = \sum \boldsymbol{F_{CV}}$ است زیرا در لحظه **t** حجم کنترل و سیستم بر هم منطبق اند و نیروی برآیند $\sum \boldsymbol{F}$ ، سیستم را از حجم کنترل بیرون می کند.

اگر جریان دائمی باشد، در آن صورت داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}\rho d\forall = 0 \longrightarrow \sum \vec{F} = \int_{CS} \vec{V}\rho V.\,dA$$

یعنی در این حالت برآیند نیروهای خارجی وارد بر حجم کنترل برابر است با نرخ خالص خروج مومنتم از سطح کنترل

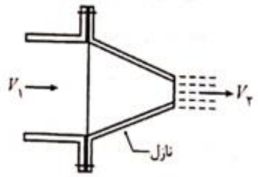
اگر جریان یک بعدی و سرعت بر حسب مقدار متوسط (V) باشد، در این صورت داریم:

$$\sum \vec{F} = (\sum \vec{V}\rho Q)_{out} - (\sum \vec{V}\rho Q)_{in} \quad \text{یا} \quad \sum \vec{F} = (\sum \rho Q\vec{V})_{out} - (\sum \rho Q\vec{V})_{in}$$

با به کارگیری رابطه بالا برای یک لوله جریان مانند شکل داریم:

$$\sum F = \rho_2 Q_2 V_2 - \rho_1 Q_1 V_1 \xrightarrow[\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \dot{m}]{\text{جریان دائمی}} \sum F = \dot{m}\,(V_2 - V_1)$$

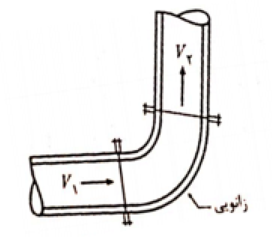
نکته: از آنجایی که سرعت یک کمیت برداری است، بایستی اندازه و جهت آن در به کارگیری معادله مومنتوم لحاظ شود. یعنی تغییر در اندازه سرعت یا جهت آن و یا ترکیبی از این دو، می تواند سبب ایجاد نیروی خارجی بر سیال شود.



الف) تغییر در اندازه سرعت:

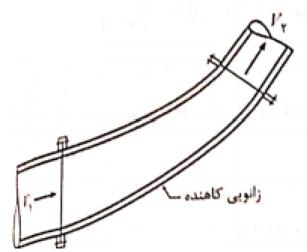
یک مثال عملی از این حالت، لوله مستقیمی که در امتداد محور خود توسط یک نازل با کاهش قطر (کم شدن مساحت) مواجه شده است. در این حالت با کاهش مساحت مقطع، سرعت جریان در لوله افزایش می یابد ولی جهت آن تغییر نمی کند.

ب) تغییر در جهت سرعت:



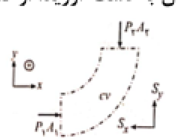
یک مثال عملی از این حالت، لوله ای با قطر ثابت می باشد که توسط یک زانویی (خم) تحت زاویه مشخصی خم شده است. این خم شدگی سبب می شود تا جهت سرعت جریان در لوله تغییر کند ولی به علت ثابت بودن قطر و مساحت لوله، اندازه سرعت ثابت است.

ج) تغییر در اندازه و جهت سرعت:



این حالت ترکیبی از دو وضعیت قبلی است که تغییر سطح مقطع و خم شدگی در لوله، هم زمان وجود دارند. زانویی (خم) کاهنده مثالی عملی برای این حالت است.

مثال۱: آب با دبی ۱۵۰ lit/s در یک لوله به قطر ۲۰ سانتی متر جریان دارد. یک زانویی افقی ۹۰ درجه در لوله وجود دارد و فشار در ورودی زانویی ۲۰۰ kpa می باشد. مولفه های نیروی لازم برای نگه داشتن زانویی را در امتداد سرعت ورودی و در امتداد عمود بر آن به دست آورید. از تلفات صرف نظر کنید.



حجم کنترل را مطابق شکل در نظر می گیریم. در این حالت توجه داریم که نیروی وزن به علت عمود بودن بر صفحه سرعت ها، در حجم کنترل و معادله مومنتم وارد نمی شود.

$$V_۱ = V_۲ = \frac{Q}{A} = \frac{۱۵۰ \times ۱۰^{-۳}}{\left(\frac{\pi \times ۰/۲^۲}{۴}\right)} = ۵ \ m/s$$

$$z_۱ = z_۲ \ , V_۱ = V_۲ \ , \Delta H_{(۱-۲)} = ۰ \ \xrightarrow[\text{برنولی}]{\text{طبق معادله}} \ P_۱ = P_۲ = ۲۰۰ \ kPa$$

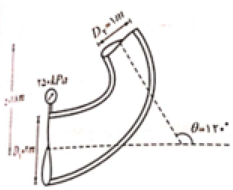
با نوشتن معادله مومنتم برای سیال موجود در حجم کنترل خواهیم داشت:

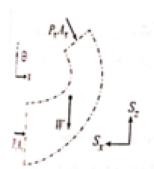
$$\sum \vec{F} = \rho Q (\vec{V_۲} - \vec{V_۱}) \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = PA - S_x = \rho Q \,(V_{x_۲} - V_{x_۱}) \\ \sum F_y = -PA + S_y = \rho Q \,(V_{y_۲} - V_{y_۱}) \end{cases}$$

$$20 \times 10^3 \left(\frac{\pi \times 0.2^2}{4}\right) - S_X = (1000)(0.15)(0 - 5) \qquad S_X = 6750\ N$$ به سمت چپ

$$-20 \times 10^3 \left(\frac{\pi \times 0.2^2}{4}\right) + S_y = (1000)(0.15)(5 - 0) \qquad S_y = 6750\ N$$ به سمت بالا

نیروی لازم برای ثابت نگه داشتن زانویی بایستی مساوی و خلاف جهت نیروی وارده از جانب سیال به زانویی (یعنی نیروی عکس العمل R) باشد. به عبارت دیگر، این نیرو بایستی مساوی و هم جهت با نیروی وارده از طرف زانویی به سیال (یعنی نیروی اندرکنش S) باشد.





مثال۲: یک زانویی کاهنده مطابق شکل در صفحه قائم قرار دارد. دبی آب عبوری از زانویی برابر ۱۲ m2/s و وزن سیال درون آن ۵۵.۸ KN است. بردار نیروی وارد بر زانویی را به دست آورید. تلفات زانویی به صورت $0.25\frac{V_2^2}{2g}$ بیان می شود.

در زانویی کاهنده، جهت جریان از مقطع با قطر بیشتر به سمت مقطع با قطر کمتر است. با انتخاب درون زانویی به عنوان حجم کنترل، خواهیم داشت:

ابتدا سرعت های ورودی و خروجی در حجم کنترل را به دست می آوریم:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{12}{\pi \times \frac{2^2}{4}} = 4\ M/S \qquad \xrightarrow[\text{پیوستگی}]{\text{معادله}} V_۲ = V_۱\left(\frac{D_۱}{D_۲}\right)^۲ = ۴ \times \left(\frac{۲}{۱}\right)^۲ = ۱۶\ m/s$$

سپس برای تعیین فشار خروجی، معادله برنولی را برای جریان در زانویی می نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \Delta H_{(1-2)}$$

$$\frac{250}{10} + \frac{4^2}{20} + 0 = \frac{P_2}{10} + \frac{16^2}{20} + 1.8 + 0.25\left(\frac{16^2}{2 \times 10}\right) \longrightarrow P_2 = 80\ kpa$$

حال با نوشتن معادله مومنتم در حجم کنترل خواهیم داشت:

$$\sum \vec{F} = \rho Q(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1})$$

الف) در راستای x:

$$\sum \vec{F} = \rho Q\left(\overrightarrow{V_{x2}} - \overrightarrow{V_{x1}}\right) = P_1A_1 + P_2A_2cos60 - S_x = \rho Q(-V_2cos60 - V_1)$$

$$(250 \times 10^3)\left(\frac{\pi \times 2^2}{4}\right) + (80 \times 10^3)\left(\frac{\pi \times 1^2}{4}\right)cos60 - S_x = 1000(12)(-16cos60 - 4)$$

$$S_x = 924 \times 10^3 \ \ N = 924\ KN$$

ب) در راستای z:

$$\sum \vec{F} = \rho Q\left(\overrightarrow{V_{z2}} - \overrightarrow{V_{z1}}\right) = S_z - W - P_2A_2sin60 = \rho Q(-V_2sin60 - 0)$$

$$S_z - (55.8 \times 10^3) - (80 \times 10^3)\left(\frac{\pi \times 1^2}{4}\right)sin60 = 1000(12)(16 \times sin60 - 0)$$

$$S_z = 270 \times 10^3 \ \ N = 270\ KN \qquad \longrightarrow \qquad \vec{S} = -924\hat{\imath} + 270\hat{\jmath}$$

نیروی وارد بر زانویی (R) مساوی و خلاف جهت نیروی وارد بر سیال است، بنابراین داریم:

$$\vec{R} = -\vec{S} = 924\hat{\imath} + 270\hat{\jmath}$$

نکته: برای به کارگیری معادله مومنتم و حل مسائل مربوط به آن، بهتر است به موارد زیر توجه شود:

۱- اگر جریان در مجاورت هوای آزاد باشد (اتمسفریک باشد)، فشار نسبی برابر صفر خواهد بود و در مقطع مورد منظر نیروی فشاری نخواهیم داشت ($\boldsymbol{P_A = 0}$).

۲- چون بردار برآیند نیروها ($\sum \vec{F}$) با بردار تفاضل سرعت ها ($\overrightarrow{V_{out}} - \overrightarrow{V_{in}}$) هم راستا می باشد. بنابراین در صورت هم صفحه بودن بردار تفاضل سرعت ها، هرنیرویی که عمود بر صفحه سرعت ها باشد در تامین ($\sum \vec{F}$) مشارکت نخواهد داشت. از این رو نیروی مذکور در معادله مومنتوم وارد نخواهد شد. به عنوان مثال در یک لوله که در صفحه افق قرار دارد، نیروی وزن در معادله مومنتم وارد نمی شود.

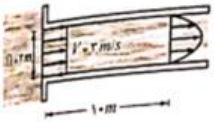
۳- در حل مسائل مومنتم ممکن است نیاز باشد تا هر سه معادله پیوستگی، برنولی و مومنتم را به ترتیب به کار ببریم. با استفاده از معادله پیوستگی سرعت مجهول ، معلوم خواهد شد. سپس با به کارگیری معادله برنولی، فشار مجهول را پیدا کرده و در آخر نیز با معادله مومنتم، نیروی اندرکنش S را محاسبه می کنیم.

نکته:همانطور که مشاهده شد در به کارگیری معادله مومنتم نیز مانند در معادله برنولی، جریان را یک بعدی در نظر گرفتیم. یعنی فرض کردیم که سرعت جریان در هر مقطع برابر سرعت متوسط آن مقطع است. حال آن که در عمل، جریان کاملا یک بعدی نیست و توزیع سرعت غیریکنواخت می باشد. بنابراین در این حالت نیز مانند معادله برنولی که ضریب تصحیح انرژی جنبشی را برای تطبیق با حالت واقعی به کار گرفتیم، از ضریبی به نام ضریب تصحیح اندازه حرکت استفاده می کنیم. مقدار این ضریب که آن را با $\boldsymbol{\beta}$ نشان می دهند، از معادله زیر قابل محاسبه است:

$$\boldsymbol{\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{u}{v}\right)^2 dA}$$

در رابطه بالا، u: پروفیل توزیع سرعت (غیریکنواخت) در مقطع جریان، V: سرعت متوسط در مقطع جریان و A: مساحت مقطع جریان.

مثال۳: آب با جرم مخصوص kg/m3 ۱۰۰۰ و سرعت یکنواخت m/s ۳ مطابق شکل وارد لوله ای به قطر ۲ متر می شود و پس از طی مسافت ۱۰ متر، توزیع سرعت شکل سهمیگون با معادله $u = 6(1 - r^2)$ به خود می گیرد. اگر افت فشار جریان در این فاصله برابر kpa ۲۳ باشد، نیروی اصطکاک وارد بر لوله در این طول چقدر است؟



پروفیل سرعت در مقطع دوم سهمیگون بوده و مربوط به جریان آرام است، بنابراین داریم:

$$u = u_{max}\left(1-\frac{r^۲}{R^۲}\right) = ۶\left(1-\frac{r^۲}{۱^۲}\right) \Rightarrow u_{max} = ۶\ m/s \quad , R = ۱\,m$$

$$V = \frac{۱}{۲}u_{max} = \frac{۶}{۲} = ۳\ m/s$$

$$\beta = \frac{۴}{۳}$$

چون توزیع سرعت در مقطع دوم یکنواخت نیست، بنابراین به هنگام استفاده از معادله مومنتم بایستی ضریب β را در سرعت متوسط این مقطع ضرب کرد:

$$\sum F = P_۱A_۱ - S - P_۲A_۲ = \rho Q(\beta V_۲ - V_۱) \Rightarrow S = \Delta PA - \beta\rho QV_۲ + \rho QV_۱$$

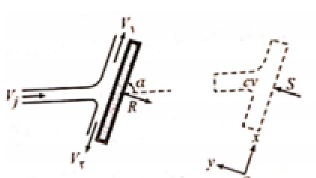
$$S = (۲۳\times۱۰^۳)(\pi\times۱^۲) - \left(\frac{۴}{۳}\right)(۱۰۰۰)(۳\times\pi\times۱^۲)(۳) + (۱۰۰۰)(۳\times\pi\times۱^۲)(۳) = ۶۰۰۰۰\ N = ۶۰\ kN$$

$$\Rightarrow F_f = R = S = ۶۰\ kN$$

جت مایع:

علاوه بر جریان پرفشار در لوله ها، نوع دیگری ازجریان نیز وجود دارد که در تماس کامل با اتمسفر است، بدون آن که با هوا مخلوط گردد. این نوع جریان پرسرعت مایع "جت مایع" و یا به اختصار "جت" نامیده می شود.

در بررسی جت مایع علاوه بر فرضیات مربوط به دائمی و یک بعدی بودن جریان، دو فرض دیگر را نیز در نظر می گیریم، یکی اینکه جریان بدون اصطکاک (غیرلزج) است و دیگر آنکه از اثر نیروی وزن جت صرف نظر می شود. در ضمن توجه داریم که در جت مایع به علت مجاورت جریان با هوا، فشار نسبی صفر خواهد بود.



الف) نیروی وارد بر صفحات تخت

شکل مقابل یک جت مایع افقی و یک صفحه تخت را که با افق زاویه α می سازد، نشان می دهد. جت که مقطع آن را دایره در نظر می گیریم، پس از برخورد به صفحه تخت منشعب می شود. در این حالت با در نظر گرفتن حجم کنترل در محل انشعاب خواهیم داشت:

چون فشار نسبی در کلیه مقاطع صفر بوده و از نیروی وزن جت نیز صرف نظر می شود، بنابراین برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیال (مایع) تنها شامل نیروی S است. از طرفی چون جریان بدون اصطکاک است، می توان نتیجه گرفت که نیروی S فقط ناشی از تنش های قائمی است که از جداره به مایع وارد می شوند، پس با توجه به تخت بودن صفحه، راستای نیروی S عمود بر صفحه خواهد بود. حال با نوشتن معادله مومنتم در راستای y (عمود بر صفحه) خواهیم داشت:

$$\sum F_y = \left(\sum \rho QV_y\right)_{out} - \left(\sum \rho QV_y\right)_{in} \longrightarrow S = ۰-(-\rho Q_j V_j \sin\alpha) = \rho Q_j V_j \sin\alpha$$

نیروی وارد بر صفحه (R) مساوی و خلاف جهت S است، بنابراین می نویسیم:

$$\boxed{R = \rho Q_j V_j \sin\alpha = \rho A_j V_j^{2} \sin\alpha = \rho(\frac{Q_j^{2}}{A_j})\sin\alpha}$$

که در این رابطه: ρ: دانسیته سیال، Q_j : دبی عبوری از مقطع جت، V_j :سرعت جت و A_j : مساحت مقطع جت می باشد.

نکته: اگر صفحه تخت کوچک باشد، رابطه بین دبی جت (Q_j) و دبی های منشعب شده از آن (Q_1 و Q_2)را می توان به صورت زیر به دست آورد:
پس از اختلاف ارتفاع کوچکی که ممکن است بین ورودی و خروجی های حجم کنترل وجود داشته باشد، صرف نظر می کنیم و می نویسیم:

$$P_j = P_1 = P_2 = 0 \xrightarrow[\text{برنولی}]{\text{معادله}} V_j = V_1 = V_2$$

حال با نوشتن معادله مومنتم در راستای X (موازی با صفحه) خواهیم داشت:

$$\sum \vec{F} = (\sum \rho Q V_X)_{out} - (\sum \rho Q V_y)_{in} \longrightarrow 0 = (\rho Q_1 V_1 - \rho Q_2 V_2) - (\rho Q_j V_j cos\alpha)$$

$$Q_1 - Q_2 = Q_j cos\alpha$$

از طرفی طبق معدله پیوستگی جریان داریم:

$$Q_1 + Q_2 = Q_j$$

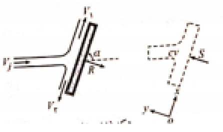
$$\begin{cases} Q_j(1+cos\alpha) = 2Q_1 \\ Q_j(1-cos\alpha) = 2Q_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Q_1 = Q_j\dfrac{(1+cos\alpha)}{2} \\ Q_2 = Q_j\dfrac{(1-cos\alpha)}{2} \end{cases}$$

نکته: اگر $\alpha = 90$ باشد داریم:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q_j}{2}$$

نیروی وارد بر صفحه تخت برابر است با:

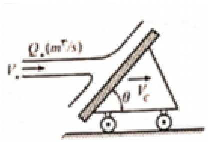
$$R = \rho Q_j V_j$$



نکته: اگر صفح تخت نشان داده شده در شکل مقابل با سرعت ثابت (Vp) در حال حرکت باشد، در آن صورت بایستی در روابط مربوط به محاسبه نیروی جت، به جای سرعت جت (Vj) از سرعت نسبی جت و صفحه (U) استفاده کرد:

$$\boldsymbol{U = V_j \pm V_P}$$

در رابطه بالا علامت های منفی و مثبت به ترتیب مربوط به حالت های هم جهت و غیر هم جهت حرکت جت می باشد.



مثال۴: در شکل زیر، الف) ارابه با چه سرعتی از جت دور شود تا توان جذب شده توسط صفحه حداکثر شود؟
ب) اینکه مقدار این توان حداکثر چقدر است؟ از اصطکاک بین صفحه و سیال صرف نظر شود.
الف)

$$R = \rho QU \sin\theta = \rho A_{\circ} U^{2} \sin\theta = \rho A_{\circ}(V_{\circ} - V_c)^{2} \sin\theta$$

توان جذب شده توسط صفحه:

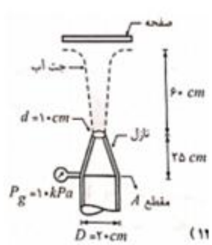
$$N = R_x . V_c \;\; , \;\; R_x = R \sin\theta \;\Rightarrow\; N = \rho A_{\circ} V_c (V_{\circ} - V_c)^{2} \sin^{2}\theta$$

برای ماکزیمم شدن توان جذب شده:

$$\frac{dN}{dV_c} = 0 \;\Rightarrow\; (V_{\circ} - V_c)^{2} - 2V_c (V_{\circ} - V_c) = 0 \;\Rightarrow\; V_c = \frac{1}{3} V_{\circ}$$

ب) توان حداکثر:

$$N_{max} = \rho A_{\circ} (\frac{1}{3} V_{\circ})(V_{\circ} - \frac{1}{3} V_{\circ})^{2} \sin^{2}\theta = \frac{4}{27} \rho A_{\circ} V_{\circ}^{3} \sin^{2}\theta$$



(۱۱

مثال۵: با توجه به شکل، وزن صفحه چقدر باشد تا در جای خود ثابت بماند؟ ($g=10$ m/s , $\rho_w = 1000\ kg/m^3$)
ابتدا معادله های پیوستگی و برنولی را برای ابتدا و انتهای نازل (به ترتیب نقاط A و j) می نویسیم:

$$\frac{P_A}{\gamma} + z_A + \frac{V_A^{2}}{2g} = \frac{P_j}{\gamma} + Z_j + \frac{V_j^{2}}{2g} \;\; , \;\; V_A = (\frac{d}{D})^{2} V_j = (\frac{10}{20})^{2} V_j = \frac{1}{4} V_j$$

$$\Rightarrow\; \frac{10}{10} + 0 + \frac{1}{16}(\frac{V_j^{2}}{2\times 10}) = 0 + 0/25 + \frac{V_j^{2}}{2\times 10} \;\Rightarrow\; V_j = 4\ m/s$$

محاسبه سرعت (V):

$$\frac{P_j}{\gamma} + z_j + \frac{V_j^{2}}{2g} = \frac{P_{\circ}}{\gamma} + z_{\circ} + \frac{V^{2}}{2g} \;\Rightarrow\; 0 + 0 + \frac{4^{2}}{2\times 10} = 0 + 0/6 + \frac{V^{2}}{2\times 10} \;\Rightarrow\; V = 2\ m/s$$

در نهایت با نوشتن رابطه تعادل نیروها در راستای قائم برای صفحه، وزن صفحه را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; F = W \\ F = \rho QV = (1000)(\frac{\pi \times 0/1^{2}}{4} \times 4)(2) = 20\pi = 62/8\ N \end{cases} \;\Rightarrow\; W = 62/8\ N$$

ب) نیروی وارد بر سطوح منحنی:

شکل مقابل یک جت مایع را نشان می دهد که پس از برخورد به یک سطح منحنی، به اندازه θ منحرف شده است. در این حالت با در نظر گرفتن حجم کنترل در مجاورت سطح مذکورخواهیم داشت:

شکل (۷-۱۴)

$$\sum F_x = \rho Q(V_{X2} - V_{X1}) \longrightarrow -S_x = \rho Q_j(V_j cos\theta - V_j) \longrightarrow S_x = \rho Q_j V_j(1 - cos\theta)$$

$$\sum F_y = \rho Q(V_{y2} - V_{y1}) \longrightarrow -S_y = \rho Q_j(V_j sin\theta - 0) \longrightarrow S_y = -\rho Q_j V_j sin\theta$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} \boldsymbol{R_X} = \boldsymbol{\rho} Q_j V_j(cos\theta - 1) \\ \boldsymbol{R_y} = \boldsymbol{\rho} Q_j V_j sin\theta \end{cases}$$

نکته : اگرچه برآیند نیروهای وارد بر سطح به صورت $\sqrt{\boldsymbol{R_X}^2 + \boldsymbol{R_y}^2}$ قابل محاسبه است ولی می توان مقدار آن را مستقیم از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$R = 2\rho Q V_j \, sin\frac{\theta}{2}$$

نکته: با استفاده از معادله مومنتم می توان نشان داد که به هنگام نزدیک شدن و برخورد جت مایع به یک جسم صلب، نیرویی به اندازه ρQV و در جهت حرکت جت به جسم وارد می شود. این در حالی است که با دور شدن جت مایع از جسم صلب، نیروی ρQV جت، در خلاف جهت حرکت آن به جسم وارد می گردد.

معادله گشتاور اندازه حرکت

حاصل‌ضرب خارجی بردار نیرو و بردار مکان، گشتاور نامیده می شود.

برای سیال موجود در حجم کنترل، با فرض دو بعدی بودن جریان سیال در صفحه xy ، معادله گشتاور مومنتوم به صورت زیر است:

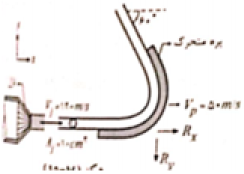
$$T_Z = (\sum \rho Q V_t r)_{out} - (\sum \rho Q V_t r)_{in}$$

که در این رابطه :

T_Z: گشتاور تمام نیروهای وارد به حجم کنترل حول محور $\mathbf{Z}$، ρ: دانسیته سیال، Q: دبی جریان و V_t: مولفه مماسی برداری سرعت که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$V_t = V_r - r\omega$$

V_r: مولفه مماسی بردار سرعت های ورودی یا خروجی حجم کنترل ، ω: سرعت زاویه ای دوران حجم کنترل و r: فاصله مبدأ (مرکز دوران) با مولفه مماسی بردار سرعت.



تمرین۱: در شکل مقابل، جت آب خروجی از نازل به یک پره متحرک (صفحه منحنی متحرک) برخورد کرده است.

الف) مولفه ها و برآیند نیروهای وارد به پره متحرک را به دست آورید.

ب) اگر به جای یک پره، یک دسته پره ادوار داشته باشیم، در آن صورت بردار نیروی وارد به پره را به دست آورید.

چون پره متحرک است، بنابراین در روابط مربوط به محاسبه نیروی جت از سرعت نسبی جت ویژه ($u = Vj - Vp$) استفاده می کنیم:

الف) وقتی جت آب به یک پره برخورد می کند:

$$R_x = \rho QU(1 - cos\theta) = \rho A_j U^2 (1 - cos\theta)$$

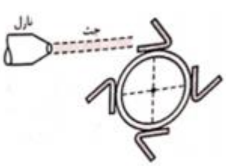
$$R_x = (1000)(0.001)(120 - 50)^2 (1 - cos120) = 7350\ N = 7.35\ KN$$

$$R_y = \rho QUsin\theta = \rho A_j U^2 sin\theta = (1000)(0.001)(120 - 50)^2 sin120 = 2450\sqrt{3}\ N = 1.45\sqrt{3}\ KN$$

محاسبه نیروی برآیند:

$$R = 2\rho QUsin\frac{\theta}{2} = 2\rho A_j U^2 \sin\frac{\theta}{2} = 2 \times 1000 \times 0.001 \times 70^2 \times sin60 = 49000\sqrt{3}N = 4.9\sqrt{3}\ KN$$

اگر به جای یک پره، یک دسته پره وجود داشته باشد، در این صورت اگر پره ها مثلا در محیط یک چرخ قرار گرفته باشند به طوری که تمام سیال خروجی از نازل را بگیرند، آن گاه دبی جرمی با دبی جرمی خروجی از نازل برابر خواهد بود. پس برای حالتی که یک دسته پره داشته باشیم، روابط به صورت زیر در می آید:



$$R_x = \rho Q_j U(1 - cos\theta)$$

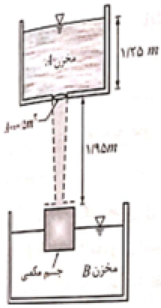
$$R_y = \rho Q_j Usin\theta$$

بنابراین می نویسیم:

$$R_x = (1000)(120 \times 0.001)(120 - 50)\ \ (1 - cos120) = 12600\ N = 12.6KN$$

$$R_y = (1000)(120 \times 0.001)(120 - 50)\ \ sin120 = 4200\sqrt{3}\ N = 4.2\sqrt{3}\ KN$$

$$\vec{R} = 12.6\hat{\imath} - 4.2\sqrt{3}\hat{\jmath}$$



تمرین۲: در شکل مقابل سطح آب ($\gamma w = 10\ KN/m^3$) در دو مخزن A و B ثابت بوده و چگالی ویژه جسم مکعبی (به ضلع ۲ متر) برابر ۰.۵ است. ارتفاع مستغرق جسم مکعبی چند متر است؟

جسم مکعبی تحت اثر نیروهای وزن، شناوری و جت مایعی است که به صورت عمودی از بالا به آن وارد می شود.
برای حل مساله ابتدا نیروی جت را محاسبه می کنیم:

$$V=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times10\times1/25}=5\ m/s$$

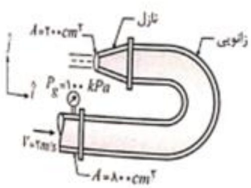
$$V^2-V_0^2=2gh \Rightarrow V^2=5^2+2\times10\times(1/25+1/95) \Rightarrow V=8\ m/s$$

$$Q=AV=A_0V_0=(0/5)(5)=2/5\ m^3/s$$

$$F=\rho QV=(1000)(2/5)(8)=20000\ N=20\ kN$$

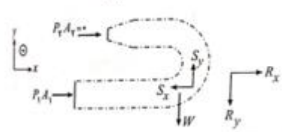
با نوشتن رابطه تعادل نیروها (در راستای قائم y) برای جسم مکعبی خواهیم داشت:

$$\sum F_y=0 \Rightarrow W+F=F_B \Rightarrow (2^3)(0/5\times10)+20=(2^2\times h)(10) \Rightarrow h=1/5\ m$$



تمرین۳: آب به صورت جت آزاد از نازلی مطابق شکل مقابل خارج می شود. اگر حجم داخلی مجموعه زانویی و نازل که در صفحه قائم قرار گرفته اند، ۱۰۰ لیتر باشد، نیروی وارده به مجموعه زانویی و نازل برحسب کیلو نیوتن چقدر می شود؟($\rho w = 10^3\ kg/m^3$)

حجم داخل زانویی و نازل را مطابق شکل مقابل به عنوان حجم کنترل در نظر می گیریم:



$$\sum F=\rho Q(V_2-V_1) \Rightarrow \begin{cases}\sum F_x=\rho Q(V_{x_2}-V_{x_1})\\ \sum F_y=\rho Q(V_{y_2}-V_{y_1})\end{cases}$$

الف) محاسبه S_x

$$P_1A_1-S_x=\rho Q(V_2-V_1) \quad و \quad V_2=V_1\left(\frac{A_1}{A_2}\right)=2\times\left(\frac{800}{200}\right)=8\ m/s$$

$$S_x=(100\times10^3)(800\times10^{-4})-(1000)(2\times800\times10^{-4})(-8-2)=9600\ N \Rightarrow R_x=9600\ N=9/6\ kN$$

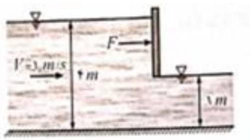
ب) محاسبه S_y

$$S_y-W=\rho Q(V_{y_2}-V_{y_1}),\ V_{y_2}=V_{y_1}=0 \Rightarrow S_y=W=(100\times10^{-3})(10)=1\ kN$$

پس نیروی وارده بر سیال موجود در حجم کنترل از طرف زانویی و نازل به صورت مقابل خواهد بود: $S=-9.6\hat{\imath}+\hat{\jmath}$

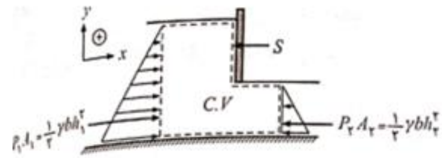
از این رو نیروی R که به مجموعه زانویی و نازل وارد می شود به شکل مقابل است: $R=9.6\hat{\imath}-\hat{\jmath}$

تمرین۴: در کانال مستطیلی نشان داده شده در شکل مقابل ارتفاع آب در بالادست و پایین دست برابر ۴ و ۱ متر می باشد. اگر سرعت آب در بالادست دریچه ۱ m/s باشد، نیروی وارد بر واحد عرض دریچه از طرف سیال چقدر است؟



حجم کنترل را مطابق شکل انتخاب می کنیم.

توجه داریم که عرض کانال برابر b و توزیع فشار، هیدرواستاتیکی در نظر گرفته می شود.



با استفاده از پیوستگی جریان و معادله مومنتم داریم:

$$V_1A_1=V_2A_2 \Rightarrow (1)(4\times b)=(V_2)(1\times b) \Rightarrow V_2=4\ m/s$$

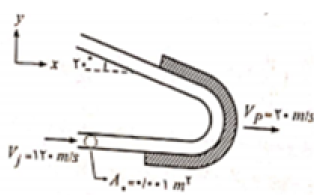
$$\sum F_x = P_1A_1-S-P_2A_2=\rho Q\,(V_2-V_1)$$

$$S=P_1A_1-P_2A_2-\rho Q\,(V_2-V_1)=\frac{1}{2}\gamma b\,(h_1^2-h_2^2)-\rho Q\,(V_2-V_1)$$

نیروی R که از طرف جریان به دریچه وارد می شود، در جهت عکس نیروی S بوده و برابر نیروی S است: $R=S=\frac{1}{2}\gamma b(h_1^2-h_2^2)-\rho Q\,(V_2-V_1)$

محاسبه R: $R=\frac{1}{2}\times 10^4\times 1\times(4^2-1^2)-1000\times(4\times1\times1)(4-1)=63000\ N=63\ kN$

تمرین۵: یک پره متحرک در شکل زیر نشان داده شده است. نیروهای اعمال شده بر پره را در جهت های x و y به دست آورید. سیال آب با دانسیته $\rho w = 1000\ kg/m^3$ می باشد. (cos20=0.94 , sin20=0.34)

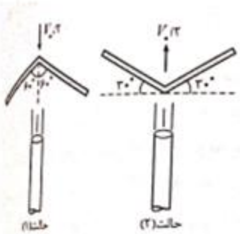


$\sin 160^\circ=\sin 20^\circ$ و $\cos 160^\circ=-\cos 20^\circ$

$$F_x=\rho QU(1-\cos\theta)$$

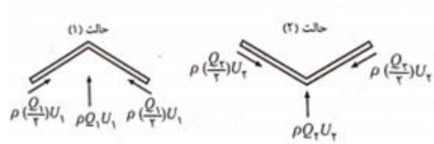
$$=\rho AU^2(1-\cos\theta)=(1000)(0.001)(120-20)^2(1-\cos 160^\circ)=19.4\times10^3\ N=19.4\ kN$$

$$F_y=\rho QU\sin\theta=\rho AU^2\sin\theta=(1000)(0.001)(120-20)^2(\sin 160)=3.4\times10^3\ N=3.4\ kN$$



تمرین۶: جت آب با سرعت V_0 و سطح مقطع ثابت A_0 به دو نوع مانع برخورد می کند. اگر دو صفحه با سرعت $\frac{V_0}{2}$ مطابق شکل حرکت کنند، نسبت نیروی قائم وارد بر صفحات $\frac{F_1}{F_2}$ کدام است؟

دیاگرام آزاد دو مانع را رسم می کنیم:



در حالت ۱ داریم:

$$U_1 = V_j + V_p = V_0 + \frac{V_0}{2} = \frac{3V_0}{2}$$

$$\sum F_{y_1} = F_1 = \rho Q_1 U_1 + 2\rho(\frac{Q_1}{2})U_1 \cos 60 = \frac{3}{2}\rho Q_1 U_1 = \frac{3}{2}\rho A_j U_1^2$$

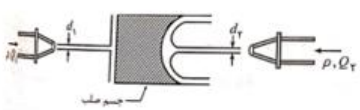
در حالت ۲ داریم:

$$U_2 = V_j - V_p = V_0 - \frac{V_0}{2} = \frac{V_0}{2}$$

$$\sum F_{y_2} = F_2 = \rho Q_2 U_2 - 2\rho(\frac{Q_2}{2})U_2 \cos 60 = \frac{1}{2}\rho Q_2 U_2 = \frac{1}{2}\rho A_j U_2^2$$

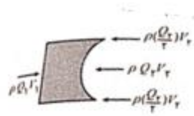
مقایسه نیروهای قائم در دو حالت:

$$\frac{F_1}{F_2} = 3(\frac{U_1}{U_2})^2 = 3 \times \left(\frac{\frac{3V_0}{2}}{\frac{V_0}{2}}\right)^2 = 27$$



تمرین۷: با توجه به شکل روبرو، شرط تعادل جسم صلب چیست؟

ابتدا دیاگرام آزاد جسم صلب را رسم می کنیم:

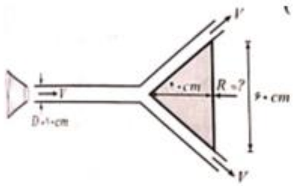


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \rho Q_1 V_1 = \rho(\frac{Q_2}{2})V_2 + \rho Q_2 V_2 + \rho(\frac{Q_2}{2})V_2$$
$$\Rightarrow Q_1 V_1 = 2 Q_2 V_2$$

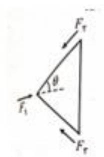
با توجه به اینکه $V_1 = \frac{Q_1}{A_1}$ و $V_2 = \frac{Q_2}{A_2}$ داریم:

$$Q_1(\frac{Q_1}{A_1}) = 2Q_2(\frac{Q_2}{A_2}) \Rightarrow (\frac{Q_1}{Q_2})^2 = 2(\frac{A_1}{A_2}) = 2(\frac{d_1}{d_2})^2 \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \sqrt{2}(\frac{d_1}{d_2})$$

تمرین۸: فواره نشان داده شده در شکل زیر با قطر ۱۰ cm و دبی ۳۰ lit/s روی مخروط ثابتی آب می ریزد. قطر قاعده مخروط ۶۰ cm و ارتفاع آن ۴۰ cm می باشد. نیروی لازم (R) برای ثابلت نگه داشتن مخروط را بر حسب نیوتن محاسبه کنید. ($\rho_w = 1000\ kg/m^3$ ، $\pi = 3$)



دیاگرام آزاد را رسم می کنیم:



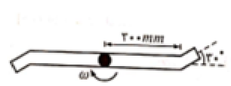
$$F_1 = \rho Q V$$
$$F_2 = \rho(\frac{Q}{2}) V\cos\theta$$
$$F_3 = \rho(\frac{Q}{2}) V\cos\theta$$

$$\sum Fx = F_1 - F_2 - F_3 = \rho QV - \frac{1}{2}\rho QV\cos\theta - \frac{1}{2}\rho QV\cos\theta = \rho QV(1-\cos\theta)$$

(با توجه به شکل) $\cos\theta = \frac{4}{5}$ و $V = \frac{Q}{A} = \frac{30\times 10^{-3}}{\pi \times 0.05^2} = \frac{12}{\pi} = 4\ m/s$

$$R = \sum Fx = 10^3(30\times 10^{-3})(4)\left(1-\frac{4}{5}\right) = 24\ N$$

تمرین۹:در شکل زیر پلان یک آبپاش گردان نشان داده شده است که آب از لوله قائم واقع در وسط آن وارد و از دهانه هایی به قطر ۵ میلی متر خارج می شود. اگر دبی کل خروجی lit/s ۱.۵ باشد، مطلوب است:

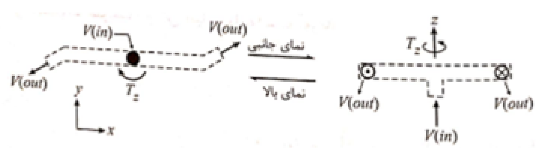


الف) سرعت دورانی آبپاش با صرف نظر کردن از اصطکاک.

ب) سرعت دورانی آبپاش که گشتاور مقاوم روی محور آن برابر N.m ۰.۹ باشد.

ج) گشتاور لازم برای ساکن نگه داشتن آبپاش.

ابتدا حجم کنترل را در نظر می گیریم و معادله گشتاور مومنتم را در حالت کلی می نویسیم:



$$T_z = (\sum \rho Q V_t r)_{out} - (\sum \rho Q V_t r)_{in}$$

چون ورودی آب به آبپاش گردان از مرکز دوران است، بنابراین $(\sum \rho Q V_t r)_{in} = 0$ خواهد بود یعنی:

$$T_z = (\sum \rho Q V_t r)_{out}$$

T_Z گشتاور نیروهای وارد بر سیال در حجم کنترل است که در این مساله برابر با گشتاور مقاوم روی محور آبپاش می باشد. V_t نیز مولفه مماسی سرعت است که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{۰/۷۵\times ۱۰^{-۳}}{\left(\frac{\pi\times ۰/۰۰۵^{۲}}{۴}\right)}=۴۰\ m/s$$

$$V_r=V\sin ۳۰^{\circ}=۴۰\times\frac{۱}{۲}=۲۰\ m/s$$

$$V_t=V_r-r\omega=۲۰-۰/۳\,\omega$$

الف) چون آبپاش بدون اصطکاک است، گشتاور مقاوم روی محور آن برابر صفر خواهد بود:

$$T_z=\left(\sum\rho QV_t\,r\right)_{out}\ \Rightarrow\ ۰/۹=۲\times(۱۰۰۰)(۰/۷۵\times ۱۰^{-۳})(۲۰-۰/۳\,\omega)(۰/۳)$$

$$\Rightarrow\ \omega=۶۰\ rad/s\ =۶۰۰\ rpm$$

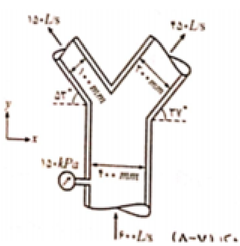
ب)

$$T_z=۰\ \Rightarrow\ \left(\sum\rho QV_t\,r\right)_{out}=۰\ \Rightarrow\ V_t=۰$$

$$۲۰-۰/۳\,\omega=۰\ \Rightarrow\ \omega=۶۶/۷\ rad/s=۶۶۷\ rpm \qquad (\text{چون } \pi=۳ \text{ است.})$$

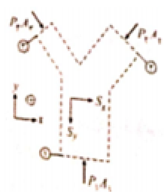
ج) گشتاور لازم برای ساکن نگه داشتن آبپاش را می توان گشتاور مقاومی فرض کرد که مانع از دوران آبپاش (ω=0) شده است:

$$T_z=\left(\sum\rho QV_t\,r\right)_{out}\ \Rightarrow\ ۲\times(۱۰۰۰)(۰/۷۵\times ۱۰^{-۳})(۲۰-۰)(۰/۳)=۹\,N.m$$



تمرین۱۰: در شکل مقابل مولفه های نیروی لازم برای نگه داری سه راهی y شکل را در امتدادهای x و y به دست آورید. صفحه افقی قرار دارد و از تلفات صرف نظر شود.(sin37=0.6 , π=3)

ابتدا حجم کترل را مانند شکل مقابل درنظر می گیریم:



سپس سرعت های ورودی و خروجی به حجم کنترل را به دست می آوریم:

$$V_1=\frac{Q_1}{A_1}=\frac{600\times 10^{-3}}{\pi\times\frac{0.4^2}{4}}=5\ m/s$$

$$V_2=\frac{Q_2}{A_2}=\frac{450\times 10^{-3}}{\pi\times\frac{0.2^2}{4}}=15\ m/s$$

برای تعیین فشارهای خروجی، معادله برنولی بین نقاط ۱ و ۲ و نقاط ۱ و ۳ می نویسیم :

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}\ \longrightarrow\ \frac{150}{10}+\frac{5^2}{2\times 10}=\frac{P_2}{10}+\frac{15^2}{2\times 10}\ \longrightarrow\ P_2=50\ kpa$$

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{P_3}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}\ \longrightarrow\ \frac{150}{10}+\frac{5^2}{2\times 10}=\frac{P_3}{10}+\frac{30^2}{2\times 10}\ \longrightarrow\ P_3=-37.5\ kpa$$

حال با نوشتن معادله مومنتم باری حجم کنترل داریم:

الف) در راستای **X**:

$$\sum Fx = (\sum \rho QV_X)_{OUT} - (\sum \rho QV_X)_{in}$$

$$-P_2A_2cos53 + P_3A_3cos37 + S_X = (\rho Q_2V_2cos37 - \rho Q_3V_3sin53) - (0)$$

$$S_X = 1000(450 \times 10^{-3})(15\ cos37) - (1000)(150 \times 10^{-3})(20\ cos53)$$

$$+(50 \times 10^3)\left(\frac{\pi \times 0.2^2}{4}\right)cos37 - (-37.5 \times 10^3)\left(\frac{\pi \times 0.1^2}{4}\right)cos53 = 4968.75\ N$$

ب) در راستای **y**:

$$\sum Fx = (\sum \rho QV_y)_{OUT} - (\sum \rho QV_y)_{in}$$

$$P_1A_1 - P_2A_2sin37 - P_3A_3sin53 - S_y = (\rho Q_2V_2sin37 + \rho Q_3V_3sin53) - (\rho Q_3V_3)$$

$$S_y = (150 \times 10^3)\left(\frac{\pi \times 0.4^2}{4}\right) - (50 \times 10^3)\left(\frac{\pi \times 0.2^2}{4}\right)sin37 - (-37.5 \times 10^3)\left(\frac{\pi \times 0.1^2}{4}\right)sin53$$

$$-(1000)(450 \times 10^{-3})(15sin37) - (1000)(150 \times 10^{-3})(20\ sin53) + (1000)(600 \times 10^{-3})(5) = 12875\ N$$

نیروهای لازم برای ثابت نگه داشتن سه راهی در دو راستای x و y ، به ترتیب با نیروهای S_X و S_y مساوی و هم جهت می باشند.

تمرین۱۱: یکجت آب به قطر ۲۰ میلی متر به طور قائم و با دبی lit/s ۱.۵ فوران می کند. اگر از اصطکاک صرف نظر شود و شکل مقطع جت نیز مدور باقی بماند، نیروی حاصل از برخورد جت با یک صفحه افقی که در فاصله ۴۵ سانتی متر بالاتر از خروجی جت قرار گرفته است، چند نیوتن است؟

$(\rho_w = ۱۰۰۰\ kg/m^۳\ ،\ \pi = ۳\ ،\ g = ۱۰\ m/s^۲)$

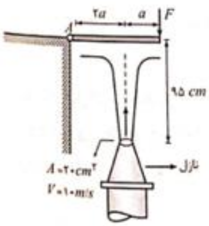
اگر V_j سرعت آب در خروجی و V سرعت برخورد جت به صفحه افقی باشد، در آن صورت با استفاده از معادله برنولی می توان نشان داد که $V_j^2 - V^2 = 2gh$ است. h فاصله خروجی یجت تا صفحه افقی است.

$$V_j = \frac{Q}{A_j} = \frac{۱/۵\times ۱۰^{-۳}}{\pi \times ۰/۰۱^۲} = \frac{۱۵}{\pi} = ۵\ m/s$$

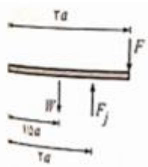
$$V^۲ = V_j^۲ - ۲gh = ۵^۲ - ۲\times ۱۰ \times ۰/۴۵ = ۱۶ \Rightarrow V = ۴\ m/s$$

$$F = \rho QV = (۱۰۰۰)(۱/۵\times ۱۰^{-۳})(۴) = ۶\ N$$

تمرین۱۲: در شکل مقابل جت آب خارج شده از نازل به مساحت ۲۰ cm2 و سرعت ۱۰ m/s، به یک صفحه فلزی که در نقطه A لولا شده است، برخورد می کند. اگر وزن صفحه ۶۰ نیوتن باشد، مقدار نیروی لازم جهت حفظ تعادل به صورت افقی چند نیوتن است؟ $(\rho_w = ۱۰^۳ kg/m^۳ \ ، g = ۱۰\ m/s^۲)$



با ترسیم دیاگرام آزاد صفحه فلزی و نوشتن رابطه تعادل لنگرها حول مفصل A خواهیم داشت:



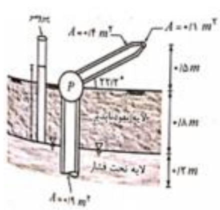
$$\Rightarrow \begin{cases} F_j = \rho Q V \\ V^۲ = V_j^۲ - ۲gh \end{cases}$$

$$F_j = (۱۰^۳)(۰/۰۰۲\times ۱۰)(۱۰^۲ - ۲\times ۱۰\times ۰/۹۵)^{۰/۵} = ۱۸۰$$

$$\sum M_O = ۰ \Rightarrow F_j \times ۲a = F \times ۳a + W \times ۱/۵a$$

$$۱۸۰\times ۲a = F\times ۳a + ۶۰\times ۱/۵a \Rightarrow F = ۹۰\ N$$

تمرین۱۳: با استفاده از امکانات نشان داده شده در شکل می خواهیم از یک لایه تحت فشار (آرتزین)، آب را بیرون بکشیم. اگر هد پمپ به کار رفته ۴/۳۵ متر باشد و اصطکاک داخل سیستم لوله ها ناچیز فرض شود، بردار نیروی جریان وارد بر کل سیستم کدام است؟ وزن آبِ داخل مجموعه ۱۲/۰۵ کیلونیوتن است.



$(g = ۱۰\ m/s^۲$ و $\sin ۲۲/۲ = \frac{۱۰}{۲۷}$ ، $\cos ۲۲/۲ = \frac{۲۵}{۲۷})$

با نوشتن معادله برنولی و پیوستگی، سرعت جریان در مقطع ورودی (۱) و خروجی (۲) را به دست می آوریم. نقطه واقع بر سطح بالایی لایه تحت فشار با اندیس صفر نشان داده شده است.

برنولی بین (۰) و (۲): $\frac{P_۰}{\gamma} + H_p = \frac{P_۲}{\gamma} + z_۲ + \frac{V_۲^۲}{۲g} \Rightarrow ۱ + ۴/۳۵ = ۰ + (۱/۳) + \frac{V_۲^۲}{۲\times ۱۰} \longrightarrow V_2^2 = 81 \longrightarrow V_2 = 9$

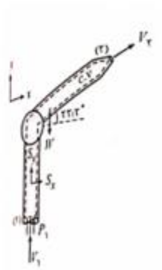
معادله پیوستگی بین ۱ و ۲:

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2 = \frac{0.1}{0.9} \times 9 = 1\ m/s$$

معادله برنولی بین نقاط ۱ و ۲ :

$$\frac{P_۰}{\gamma} + z_۰ = \frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^۲}{۲g} \Rightarrow ۱ + ۰/۲ = \frac{P_۱}{۱۰} + \frac{۱^۲}{۲۰} \Rightarrow P_۱ = ۱۱/۵\ kPa$$

رابطه مومنتم در دو راستای x و y :



$$\sum F_x = S_x = \rho Q\,(V_2 \cos\theta - 0)$$

$$\Rightarrow\ S_x = (1000)(9\times 0.1)\left(9\times\frac{25}{27} - 0\right) = 7500\ N = 7.5\ kN$$

$$\sum F_y = S_y + P_1 A_1 - W = \rho Q\,(V_2 \sin\theta - V_1)$$

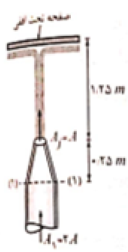
$$\Rightarrow\ S_y + (11.5\times 10^3)(0.9) - (12.05\times 10^3)$$

$$= (1000)(9\times 0.1)\left(9\times\frac{10}{27} - 1\right)\ \Rightarrow\ S_y = 3800\ N = 3.8\ kN$$

بنابراین نیرویی که از طرف جریان به سیستم وارد می شود، عکس نیروهای اندرکنش S بوده و بردار نیرو به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{R} = 7.5\hat{\imath} - 3.8\hat{\jmath}$$

تمرین ۱۴: جریان آب خارج شده از نازل شکل مقابل، در برخورد با یک صفحه تخت به وزن ۲۰ کیلونیوتن، آن را در ارتفاع ۱.۲۵ متر از دهانه خروجی نازل نگه می دارد. فشار آب در مقطع ۱-۱ و شده جریان در نازل چقدر است؟ می دانیم هد سرعت از مقطع خروجی (دهانه نازل) تا محل برخورد با صفحه ۲۵٪ کاهش می یابد.



با نوشتن معادله برنولی بین مقطع خروجی جریان از نازل و محل برخورد جت با صفحه، سرعت جریان در برخورد با صفحه (V) به دست می آید:

$$\begin{cases} \dfrac{V_j^2}{2g} = h + \dfrac{V^2}{2g} \\ \dfrac{V^2}{2g} = (1-0.25)\dfrac{V_j^2}{2g} = 0.75\dfrac{V_j^2}{2g} \end{cases} \Rightarrow\ 0.25\frac{V_j^2}{2\times 10} = 1.25\ \Rightarrow\ V_j = 10\ m/s$$

$$V_1 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)V_2 = \frac{A}{2A}\times 10 = 5\ m/s$$

حال با نوشتن معادله برنولی بین نقطه ۱ در مقطع ۱ و نقطه خروجی جت (نقطه j) به دست می آید:

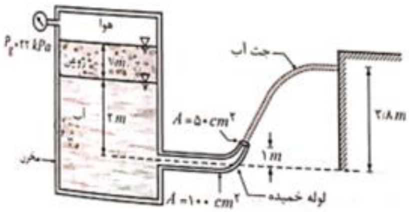
$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_j^2}{2g} + z_j\ \Rightarrow\ \frac{P_1}{\gamma} + \frac{5^2}{2\times 10} = \frac{10^2}{2\times 10} + 0.25\ \Rightarrow\ P_1 = 40\ kPa$$

برای تعیین دبی جریان، از رابطه مومنتم در محل برخورد جت با صفحه استفاده می کنیم:

$$\sum F_y = 0\ \Rightarrow\ W = F_j = \rho Q V\ \Rightarrow\ Q = \frac{W}{\rho V}$$

$$\frac{V^2}{2g} = 0.75\frac{V_j^2}{2g} = 0.75\times\frac{10^2}{2g}\ \Rightarrow\ V = 5\sqrt{3}\ m/s\quad \Rightarrow\ Q = \frac{20\times 10^3}{10^3\times 5\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ m^3/s$$

تمرین ۱۵: مخزنی مطابق شکل محتوی آب و روغن به چگالی نسبی ۰.۸ می باشد. آب از طریق لوله ای به اتمسفر تخلیه می شود و سطح مایعات در مخزن ثابت است. اگر یک دیوار قائم در مسیر جت آب و در ماکزیمم ارتفاع صعود آب قرار گیرد. در آن صورت نیروی افقی وارد بر آن از جانب جت آب چقدر است؟



($\rho_w = 10^3\,kg/m^3$ ، $g = 10\,m/s^2$ و از اصطکاک صرف‌نظر کنید.)

۱- ابتدا سرعت تخلیه آب به اتمسفر را محاسبه می کنیم:

$$V_0 = \sqrt{2gh} \quad \text{توریچلی رابطه} \longrightarrow V_0 = \sqrt{2(10)(\frac{22}{10} + 1 \times 0.8 + 2)} = 10m/s$$

۲- تعیین زاویه پرتابه (جت خروجی از لوله)

$$H = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \longrightarrow 1.8 = \frac{10^2 \sin^2 \alpha}{2 \times 10} \longrightarrow \boldsymbol{sin\alpha = 0.6} \longrightarrow \boldsymbol{\alpha = 37}$$

۳- محاسبه سرعت برخورد جت به دیوار

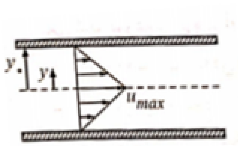
$$V = V_x = V_0 cos\alpha = (10)(0.8) = 8\ m/s$$

۴- محاسبه نیروی افقی وارد بر دیوار

$$F = \rho QV = (1000)(10 \times 50 \times 10^{-4})(8) = 400\ N$$

نکته: می توانستیم سرعت نقطه اوج را با نوشتن معادله برنولی بین خروجی از لوله و نقطه اوج نیز به دست آوریم.

تمرین ۱۶: در شکل زیر توزیع سرعت بین دو صفحه موازی به عرض واحد را نشان می دهد. ضریب تصحیح اندازه حرکت (β) چقدر است؟



با توجه به پروفیل سرعت داریم:

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{A}\int_A (\frac{u}{V})^2 dA \\ u = u_{max}(1 - \frac{y}{y_0}) \\ V = \frac{u_{max}}{2} \end{cases} \longrightarrow \beta = \frac{1}{(2y_0 \times 1)} \times 2\int_0^{y_0} \left[2\left(1 - \frac{y}{y_0}\right)\right]^2 dy = \frac{4}{y_0}\int_0^{y_0} \left[\left(1 - \frac{y}{y_0}\right)\right]^2 dy = \frac{4}{3}$$